

Généralités [5pts]

1. **Séries numériques (1pt)** Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes > 0 , telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Démontrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.
2. **Suites de fonctions (1pt)** Montrer que la fonction $t \mapsto \sqrt{|t|}$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \geq 0}$, avec $P_n(1) = 1$ pour chaque n .
3. **Séries de fonctions**
 - (a) **(1pt)** Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tend vers 0.
 - (b) **(0.5pt)** Dédurre que $\sum_{n \geq 0} I_n \sin(nx)$ converge uniformément sur tout segment de $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ avec k dans $\mathbb{Z}$.
 - (c) **(1.5pt)** Montrer que pour tout entier n , $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$ et déduire que la série $\sum_{n \geq 0} I_n \cos(nx)$ ne converge uniformément sur aucun intervalle de la forme $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, où k est un entier.

Exercice 1 : Échauffement [3pts]

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et positive.

1. **(1pt)** Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n f(t) dt$ existe, on pose alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n f(t) dt$.
2. **(0.5pt)** Montrer que $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} f(t) dt$.
3. **(0.5pt)** Dédurre que $S = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$.
4. **(1pt)** Application. Déterminer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 2 : Théorème de Chudnovsky [8pts]

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $0 < a < b < 1$. Soit $\varepsilon > 0$.

1. **(1pt)** Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall x \in [a, b], \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2-x^k} \right| \leq \varepsilon$.
2. **(1.5pt)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \left| \frac{1}{2-x^k} - \sum_{n=0}^N (x^k - 1)^n \right| \leq \varepsilon$$

3. **(1pt)** En déduire que la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers.
4. **(1.5pt)** Démontrer que l'ensemble $\left\{ \frac{n}{2^m} \mid (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que toute fonction constante réelle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers.
5. **(2pt)** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $0 < a < b < 1$, démontrer que f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers.
Indication : Vous pouvez utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass, qui stipule que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty < \epsilon$.
6. **(1pt)** Montrer que si $[a, b] = [0, 1]$, le résultat de la question 5 est toujours faux si $f(0) \notin \mathbb{Z}$ ou $f(1) \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 3 : L'espace des fonctions entières [5pts]

Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

avec $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a immédiatement $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

1. (1.25pt) Soit $f \in \mathcal{E}$. Démontrer que coefficients a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$$

2. (0.25pt) On pose $M(f, r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n}$$

3. (0.5pt) Démontrer que $\mathcal{P}$ n'est pas égal à $\mathcal{E}$ (il suffira de donner un exemple d'une fonction $f \in \mathcal{E}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme ; on justifiera la réponse).
4. (1.25pt) Démontrer que les seules fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont bornées sont les constantes.
5. (1.75pt) Démontrer que

$$f \in \mathcal{P} \iff \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{C} \text{ tout entier.}$$

Exercice 4 : Étude de deux séries de fonctions [6pts]

Dans cet exercice, on admet que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$. Posons :
$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} \\ I =]0, +\infty[\end{cases}$$

1. (1pt) Montrer que f et g sont définies et continues sur I .
2. (1pt) Montrer que pour tout $x \in I$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
3. (0.5pt) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right)_{n \geq 1}$ converge.
4. (1.5pt) Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
5. (2pt) En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Exercice 5 [Bonus] [5pts]

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes convergentes. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n c_k \quad \text{et} \quad M_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k.$$

1. (Bonus 2pt) Soit $n \in \mathbb{N}$, et posons $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$ et $B_n = \sum_{i=0}^n b_i$. Montrer que $M_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n A_{n-j} B_j$.
2. (Bonus 3pt) Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \right)$

Exercice 6 : Développement décimal d'un nombre réel [8pts]

Définition. On appelle développement décimal d'un réel x toute suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \geq 1 \quad d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = x$$

On appelle développement décimal propre d'un réel x tout développement décimal qui ne stabilise pas à 9 au delà d'un certain rang. Le développement est dit impropre dans le cas contraire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $d_0(x) = [x]$, la partie entière de x , et pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_n(x) = [10^n x] - 10 \times [10^{n-1} x].$$

1. (0.25pt) Pour le nombre réel $x = 3,12$, déterminer les valeurs $d_k(x)$ pour chaque k appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Ensuite, calculer : $\sum_{k=0}^2 \frac{d_k(x)}{10^k}$.
2. (1pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k(x)}{10^k}$.
3. (0.5pt) Dédurre que tout nombre réel admet un développement décimal.
4. (1pt) Soit x un nombre réel non-décimal. Montrer que tout développement décimal de x est propre.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Supposons que x admet deux développements décimaux $d_0, d_1 d_2 \dots$ et $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \dots$ et posons $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid d_n \neq \tilde{d}_n\}$. Sans perte de généralité on peut supposer que $d_m > \tilde{d}_m$.
 - i. (1pt) Montrer que $d_m - \tilde{d}_m = 1$. (**Indication :** Penser à minorer $d_m - \tilde{d}_m$.)
 - ii. (1pt) Montrer que $\forall j \geq m+1, \tilde{d}_j - d_j = 9$.
 - (b) (1pt) Montrer que si x n'est pas un nombre décimal, alors x possède un unique développement décimal, et celui-ci est propre.
 - (c) (1pt) Montrer qu'un nombre décimal non nul admet exactement deux développements décimaux : l'un est propre et l'autre est impropre.

Application : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Supposons qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x = 0, d_1 d_2 \dots$ avec :

- $d_1 \in \{0, \dots, 8\}$ avec d_1 différent de la première décimale de $f(0)$ [dans le développement propre].
- $d_2 \in \{0, \dots, 8\}$ avec d_2 différent de la deuxième décimale de $f(1)$ [dans le développement propre].
- $d_n \in \{0, \dots, 8\}$ avec d_n différent de la n ème décimale de $f(n-1)$ pour tout $n \geq 3$. [dans le développement propre].

1. (1pt) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, x \neq f(n)$
2. (0.25pt) Dédurre que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

NB : Dans Exercice 2, on admet la proposition suivante :

Proposition. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions convergeant uniformément sur I vers les fonctions f et g respectivement. Dans le cas où les fonctions f et g sont bornées sur I , la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction fg .