

Exercice 1 : BL-compact [2pts]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in E$. On pose $A := \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. Montrer que A est BL-compact.

Exercice 2 : Séries dans un espace vectoriel normé [8 pts]

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes dans E , on note $\sum u_n$ la série de terme général u_n . Sa somme partielle d'ordre n est $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$. Lorsque la série $\sum u_n$ converge, c'est-à-dire lorsque la suite (S_n) a une limite dans E , le vecteur $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est appelé *somme de la série* et est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente*, ou *converge absolument*, si la série à termes réels positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente. On admet la proposition suivante :

Proposition 1. Soient $(A_n)_{n \geq 0}$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n$ sont absolument convergentes. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}$. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k = (\sum_{i=0}^{+\infty} A_i) (\sum_{j=0}^{+\infty} B_j)$.

- (1pt) Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach. Montrer que si une série $\sum u_n$ de E est absolument convergente, alors elle est convergente. (**Indication** : montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy).
- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, tel que toute série de E qui est absolument convergente est convergente. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans E .
 - (0.5pts) Justifier que $\forall k \geq 0, \exists n_k \geq 0, \forall p, q \geq n_k, \|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{2^k}$.
 - (1pt) Construisez $(\varphi(k))_{k \geq 0}$ une suite de $\mathbb{N}$ vérifiant $\varphi(k+1) \geq \varphi(k) + 1$ et $\varphi(k) \geq n_k$ pour tout $k \geq 0$. (**Indication** : construire $\varphi(k+1)$ à partir de $\varphi(k)$).
 - (1pt) Dédurre que $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach.
- (1pt) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge. On note e^A la somme de cette série.
- (1pt) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels $AB = BA$. Montrer que $e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!}$ en justifiant dans quelle passage l'information $AB = BA$ est utilisée et déduire que $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.
- (0.5pts) Soient $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec P inversible. Montrer que $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.
- (1pt) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que T^k et e^T sont triangulaires aussi et leurs coefficients diagonaux sont respectivement $\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k$ et $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$.
- (1pt) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

Exercice 3 : Noyau d'une forme linéaire [3.5pts]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel et f une forme linéaire sur $(E, \|\cdot\|)$.

- (0.5pts) On suppose f continue. Montrer que $\ker f$ est fermé.
- On suppose f non continue.
 - (1pt) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de la sphère unité de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_n)| \geq 2^n.$$

- (b) (1pt) Soit x un élément de E . Montrer que

$$\left(x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite d'éléments de $\ker f$ convergente vers x .

- (c) (1pt) En déduire que f est continue si et seulement si $\ker f$ est fermé dans E .

Exercice 4 : Connexité dans un espace vectoriel normé [6.5pts]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Une partie A de E est dite connexe si la condition suivante est réalisée : si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, alors

$$(A \cap O_1 = \emptyset \text{ et } A \subset O_2) \quad \text{ou} \quad (A \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subset O_1).$$

1. Soit A une partie connexe de E et B une partie à la fois ouverte et fermée de A .
 - (a) (1pt) Justifier l'existence de deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que $B = A \cap O_1$ et $A \setminus B = A \cap O_2$.
 - (b) (1pt) Déduire que les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées d'un connexe A sont A et $\emptyset$.
 - (c) (1pt) Montrer que si $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, f est constante. (**Indication** : Utiliser la question précédente).
2. Soit A une partie de E telle que toute fonction continue $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ est constante. On veut montrer que A est connexe. Considérons l'application $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in A \cap O_1, \quad f(x) = 1 \text{ si } x \in A \cap O_2.$$

- (a) (1pt) Montrer que f est continue.
 - (b) (1pt) Déduire que A est connexe.
3. (1.5pts) Montrer que toute partie connexe par arcs est connexe.