

Espaces vectoriels normés [2/3]

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P



College of
Computing

Critère de continuité d'une application linéaire

Proposition 1

Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si, et seulement s'il existe $C \geq 0$ tel que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$.

Exemple 2:

- Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ de dimension finie. L'application définie par $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ est continue.
- Munissons $C([0, \pi], \mathbb{K})$ de la norme infinie. L'application définie par $\varphi(f) = \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt$ est continue.

Critère de continuité d'une application linéaire

Corollaire 3

Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si, et seulement si, elle est bornée sur la boule unité.

Exemple 4: En munissant l'espace des polynôme par la norme infinie, la dérivation n'est pas continue.

Exemple 5: Dans $C([0, 1], \mathbb{K})$ muni de la norme $\| \cdot \|_1$, la forme linéaire suivante est définie par :

$$\varphi : C([0, 1], \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f \longmapsto f(1).$$

n'est pas continue.

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Exercice 7:

- 1 Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Montrer que toute forme linéaire est continue sur E .
- 2 Montrer que sur un espace normé de dimension infinie il existe des formes linéaires non continues.
- 3 Conclure.

Norme subordonnée

Définition et proposition 8

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. L'ensemble des réels $C \geq 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$$

admet un plus petit élément, appelé norme subordonnée de u et noté $|||u|||$. On a de plus :

$$\begin{aligned} |||u||| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|. \end{aligned}$$

Remarque: Par définition de la norme triple, on a pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq |||u||| \|x\|$.

Exemple 9: Munissons $M_n(\mathbb{K})$ de la norme infinie, et munissons $\mathbb{K}^n$ du module usuel. La norme triple de l'application trace vaut n .

Proposition 10

Pour $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G)$, on a

$$|||v \circ u||| \leq |||u||| \cdot |||v|||$$

Remarque: En général, on n'a pas égalité dans l'inégalité précédente.

Définition 11

Supposons $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ chacun muni d'une norme.

Étant donné $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle norme subordonnée de A , et l'on note $|||A|||$, la norme subordonnée de l'application linéaire canoniquement associée à A .

Exemple 12: Étant donné $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\textcircled{1} \quad |||A|||_1 := \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [[1,n]]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

$$\textcircled{2} \quad |||A|||_\infty = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [[1,n]]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

$$\textcircled{3} \quad |||A|||_2 := \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

Exercice 13: Soit A une matrice carrée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0,$
- ② $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur $\mathbf{v},$
- ③ $\rho(A) < 1,$
- ④ il existe une norme matricielle subordonnée tq $\|A\| < 1.$

Critère de continuité d'une application multilinéaire

Critère de continuité d'une application multilinéaire

Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, et l'espace $E_1 \times \dots \times E_p$ est muni de la norme produit.

Proposition 14

Une application multilinéaire

$$\varphi : E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$$

est continue si, et seulement si, il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad \|\varphi(u_1, \dots, u_p)\| \leq C \prod_{k=1}^p \|u_k\|.$$

.

Proposition 15

Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie, alors toute application p -linéaire

$$u : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$$

est continue.

Exemple 16: L'application puissance d'une matrice est continue.

Exemple 17: Soit $n \in \mathbb{N}$. Munissons l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ de la norme définie par

$$\|P\| = \int_0^1 |P(t)| dt,$$

l'application $\mathbb{K}_n[X]^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est continue.

Continuité des applications polynomiales

Continuité des applications polynomiales

Définition 18

Une application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est dite polynomiale s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_{k_1, \dots, k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Définition 19

Supposons E de dimension finie. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Une application $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ est dite polynomiale s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_{k_1, \dots, k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \quad f(x) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Proposition 20

Toute application polynomiale est continue

Corollaire 21

L'application

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad M \longmapsto \det(M),$$

est continue.